EGT–P–MTH

गणित (प्रश्न-पत्र–I)

समय : तीन घण्टे | अधिकतम अंक : 250

प्रश्न-पत्र सम्बन्धी विशिष्ट अनुदेश

(कृपया प्रश्नों के उत्तर देने से पूर्व निम्नलिखित प्रत्येक अनुदेश को ध्यानपूर्वक पढ़ें)

इसमें **आठ** प्रश्न हैं जो दो खण्डों में विभाजित हैं तथा **हिन्दी** और **अंग्रेजी** दोनों में छपे हैं।

परीक्षार्थी को कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

प्रश्न संख्या **1** और **5** अनिवार्य हैं तथा बाकी प्रश्नों में से प्रत्येक खण्ड से कम-से-कम **एक** प्रश्न चुनकर किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

प्रत्येक प्रश्न/भाग के अंक उसके सामने दिए गए हैं।

प्रश्नों के उत्तर उसी माध्यम में लिखे जाने चाहिए जिसका उल्लेख आपके प्रवेश-पत्र में किया गया है, और इस माध्यम का स्पष्ट उल्लेख प्रश्न-सह-उत्तर (क्यू० सी० ए०) पुस्तिका के मुखपृष्ठ पर अंकित निर्दिष्ट स्थान पर किया जाना चाहिए। उल्लिखित माध्यम के अतिरिक्त अन्य किसी माध्यम में लिखे गए उत्तर पर कोई अंक नहीं मिलेंगे।

यदि आवश्यक हो, तो उपयुक्त आँकड़ों का चयन कीजिए तथा उनको निर्दिष्ट कीजिए।

जब तक उल्लिखित न हो, संकेत तथा शब्दावली प्रचलित मानक अर्थों में प्रयुक्त हैं।

प्रश्नों के उत्तरों की गणना क्रमानुसार की जाएगी। यदि काटा नहीं हो, तो प्रश्न के उत्तर की गणना की जाएगी चाहे वह उत्तर अंशतः दिया गया हो। प्रश्न-सह-उत्तर पुस्तिका में खाली छोड़ा हुआ पृष्ठ या उसके अंश को स्पष्ट रूप से काटा जाना चाहिए।

MATHEMATICS (PAPER–I)

Time Allowed : Three Hours | Maximum Marks : 250

QUESTION PAPER SPECIFIC INSTRUCTIONS

(Please read each of the following instructions carefully before attempting questions)

There are EIGHT questions divided in two Sections and printed both in HINDI and in ENGLISH.

Candidate has to attempt FIVE questions in all.

Question Nos. **1** and **5** are compulsory and out of the remaining, THREE are to be attempted choosing at least ONE question from each Section.

The number of marks carried by a question/part is indicated against it.

Answers must be written in the medium authorized in the Admission Certificate which must be stated clearly on the cover of this Question-cum-Answer (QCA) Booklet in the space provided. No marks will be given for answers written in a medium other than the authorized one.

Assume suitable data, if considered necessary, and indicate the same clearly.

Unless and otherwise indicated, symbols and notations carry their usual standard meanings.

Attempts of questions shall be counted in sequential order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in the Question-cum-Answer Booklet must be clearly struck off.

खण्ड—A / SECTION—A

1. (a) मान लीजिये कि A एक 3×2 आव्यूह है और B एक 2×3 आव्यूह है। दर्शाइये कि $C = A \cdot B$ एक अव्युत्क्रमणीय आव्यूह है।

Let A be a 3×2 matrix and B a 2×3 matrix. Show that $C = A \cdot B$ is a singular matrix. 10

(b) आधार सदिशों $e_1 = (1, 0)$ और $e_2 = (0, 1)$ को $\alpha_1 = (2, -1)$ एवं $\alpha_2 = (1, 3)$ के रैखिक संयोग के रूप में व्यक्त कीजिये।

Express basis vectors $e_1 = (1, 0)$ and $e_2 = (0, 1)$ as linear combinations of $\alpha_1 = (2, -1)$ and $\alpha_2 = (1, 3)$. 10

(c) निर्धारित कीजिये कि $\lim_{z \to 1} (1 - z) \tan \frac{\pi z}{2}$ का अस्तित्व है या कि नहीं। अगर यह सीमा विद्यमान है, तो इसका मान ज्ञात कीजिये।

Determine if $\lim_{z \to 1} (1 - z) \tan \frac{\pi z}{2}$ exists or not. If the limit exists, then find its value. 10

(d) सीमा $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{r=0}^{n-1} \sqrt{n^2 - r^2}$ का मान ज्ञात कीजिये।

Find the limit $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{r=0}^{n-1} \sqrt{n^2 - r^2}$. 10

(e) सरल रेखा $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{-1}$ का समतल $x + y + 2z = 6$ पर प्रक्षेपण ज्ञात कीजिये।

Find the projection of the straight line $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{-1}$ on the plane $x + y + 2z = 6$. 10

2. (a) अगर A और B समरूप $n \times n$ आव्यूह हैं, तो दर्शाइये कि उनके आइगेन मान एक ही हैं।

Show that if A and B are similar $n \times n$ matrices, then they have the same eigenvalues. 12

(b) बिन्दु $(1, 0)$ से परवलय $y^2 = 4x$ तक की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिये।

Find the shortest distance from the point $(1, 0)$ to the parabola $y^2 = 4x$. 13

(c) दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ x-अक्ष के चारों तरफ परिभ्रमण कर रहा है। परिक्रमित घन का आयतन ज्ञात कीजिये।

The ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ revolves about the x-axis. Find the volume of the solid of revolution. 13

(d) रेखाओं

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$$
$$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$$

और z-अक्ष के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिये।

Find the shortest distance between the lines

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$$
$$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$$

and the z-axis. 12

3. (a) रैखिक समीकरण निकाय

$$x+3y-2z=-1$$
$$5y+3z=-8$$
$$x-2y-5z=7$$

के लिये निर्धारित कीजिये कि निम्नलिखित कथनों में से कौन-से सही हैं और कौन-से गलत :

(i) समीकरण निकाय का कोई भी हल नहीं है।

(ii) समीकरण निकाय का सिर्फ एक ही हल है।

(iii) समीकरण निकाय के असीम मात्रा में अनेक हल हैं।

For the system of linear equations

$$x+3y-2z=-1$$
$$5y+3z=-8$$
$$x-2y-5z=7$$

determine which of the following statements are true and which are false :

(i) The system has no solution.

(ii) The system has a unique solution.

(iii) The system has infinitely many solutions. 13

(b) मान लीजिये कि

$$f(x, y) = xy^2, \quad \text{यदि} \quad y > 0$$
$$= -xy^2, \quad \text{यदि} \quad y \le 0$$

निर्धारित कीजिये कि $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1)$ और $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1)$ में से किसका अस्तित्व है और किसका अस्तित्व नहीं है।

Let

$$f(x, y) = xy^2, \quad \text{if} \quad y > 0$$
$$= -xy^2, \quad \text{if} \quad y \le 0$$

Determine which of $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1)$ and $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1)$ exists and which does not exist. 12

(c) परवलयज $(x + y + z)(2x + y - z) = 6z$ की उन जनक रेखाओं के समीकरणों को ज्ञात कीजिये, जो बिन्दु (1, 1, 1) में से गुज़रती हैं।

Find the equations to the generating lines of the paraboloid $(x + y + z)(2x + y - z) = 6z$ which pass through the point (1, 1, 1). 13

(d) xyz-समतल में स्थित, बिन्दुओं (0, 0, 0), (0, 1, −1), (−1, 2, 0) और (1, 2, 3) में से गुज़रते हुये गोले का समीकरण ज्ञात कीजिये।

Find the equation of the sphere in xyz-plane passing through the points (0, 0, 0), (0, 1, −1), (−1, 2, 0) and (1, 2, 3). 12

4. (a) अन्तराल [2, 3] पर $x^4 - 5x^2 + 4$ के अधिकतम और न्यूनतम मान ज्ञात कीजिये।

Find the maximum and the minimum values of $x^4 - 5x^2 + 4$ on the interval [2, 3]. 13

(b) समाकल $\int_0^a \int_{x/a}^x \frac{x\,dy\,dx}{x^2 + y^2}$ का मान निकालिये।

Evaluate the integral $\int_0^a \int_{x/a}^x \frac{x\,dy\,dx}{x^2 + y^2}$. 12

(c) उस शंकु, जिसका शीर्ष (0, 0, 1) है और जिसका निर्देशक वक्र $2x^2 - y^2 = 4$, $z = 0$ है, का समीकरण ज्ञात कीजिये।

Find the equation of the cone with (0, 0, 1) as the vertex and $2x^2 - y^2 = 4$, $z = 0$ as the guiding curve. 13

(d) $3x - y + 3z = 8$ के समांतर और बिन्दु (1, 1, 1) में से गुज़रते हुये समतल का समीकरण ज्ञात कीजिये।

Find the equation of the plane parallel to $3x - y + 3z = 8$ and passing through the point (1, 1, 1). 12

खण्ड—B / SECTION—B

5. (a) हल कीजिये/Solve : 10

$$y'' - y = x^2 e^{2x}$$

(b) $x = 3t$, $y = 3t^2$, $z = 3t^3$ समीकरणों वाले वक्र के एक आम बिन्दु पर स्पर्श-रेखा और रेखा $y = z - x = 0$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिये।

Find the angle between the tangent at a general point of the curve whose equations are $x = 3t$, $y = 3t^2$, $z = 3t^3$ and the line $y = z - x = 0$. 10

(c) हल कीजिये/Solve : 10

$$y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 12e^{2x} + 27e^{-x}$$

(d) (i) $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ का लाप्लास रूपान्तर ज्ञात कीजिये।

Find the Laplace transform of $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$.

(ii) $\frac{5s^2 + 3s - 16}{(s-1)(s-2)(s+3)}$ का विलोम लाप्लास रूपान्तर ज्ञात कीजिये।

Find the inverse Laplace transform of $\frac{5s^2 + 3s - 16}{(s-1)(s-2)(s+3)}$. 10

(e) एक कण को धरती के एक बिन्दु से प्रक्षेपित करने पर वह एक दीवार, जो प्रक्षेपण बिन्दु से d दूरी पर है और जिसकी ऊँचाई h है, को छूते हुये पार करता है। अगर यह कण ऊर्ध्वाधर तल पर गतिमान है और इसकी क्षैतिज पहुँच R है, तो प्रक्षेपण की उच्चता ज्ञात कीजिये।

A particle projected from a given point on the ground just clears a wall of height h at a distance d from the point of projection. If the particle moves in a vertical plane and if the horizontal range is R, find the elevation of the projection. 10

6. (a) हल कीजिये/Solve : 13

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 y + 2\frac{dy}{dx}x - y = 0$$

(b) एक कण, जो एक सरल रेखा में सरल आवर्त गति से चल रहा है, के पथ के केन्द्र से x_1 और x_2 की दूरी पर वेग क्रमशः v_1 और v_2 हैं। उसकी गति का आवर्तकाल ज्ञात कीजिये।

A particle moving with simple harmonic motion in a straight line has velocities v_1 and v_2 at distances x_1 and x_2 respectively from the centre of its path. Find the period of its motion. 12

(c) हल कीजिये/Solve : 13

$$y'' + 16y = 32\sec 2x$$

(d) अगर गोलक $x^2+y^2+z^2=a^2$ का पृष्ठ S है, तो गाउस के अपसरण प्रमेय का इस्तेमाल करते हुये

$$\iint_S [(x+z)\, dydz + (y+z)\, dzdx + (x+y)\, dxdy]$$

का मान निकालिये।

If S is the surface of the sphere $x^2+y^2+z^2=a^2$, then evaluate

$$\iint_S [(x+z)\, dydz + (y+z)\, dzdx + (x+y)\, dxdy]$$

using Gauss' divergence theorem. 12

7. (a) हल कीजिये/Solve : 13

$$(1+x)^2 y'' + (1+x) y' + y = 4\cos(\log(1+x))$$

(b) वक्र

$$\vec{r} = a(u - \sin u)\vec{i} + a(1-\cos u)\vec{j} + bu\,\vec{k}$$

की वक्रता और विमोटन ज्ञात कीजिये।

Find the curvature and torsion of the curve

$$\vec{r} = a(u - \sin u)\vec{i} + a(1-\cos u)\vec{j} + bu\,\vec{k}$$ 12

(c) प्रारंभिक मान समस्या

$$y'' - 5y' + 4y = e^{2t}$$

$$y(0) = \frac{19}{12},\ y'(0) = \frac{8}{3}$$

को हल कीजिये।

Solve the initial value problem

$$y'' - 5y' + 4y = e^{2t}$$

$$y(0) = \frac{19}{12},\ y'(0) = \frac{8}{3}$$ 13

(d) α और β को, जिसके लिये $x^\alpha y^\beta$ समीकरण $(4y^2+3xy)\,dx - (3xy+2x^2)\,dy = 0$ का एक समाकलन गुणक है, ज्ञात कीजिये और समीकरण हल कीजिये।

Find α and β such that $x^\alpha y^\beta$ is an integrating factor of $(4y^2+3xy)\,dx - (3xy+2x^2)\,dy = 0$ and solve the equation. 12

8. *(a)* मान लीजिये कि $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$ है। दर्शाइये कि $\text{curl}(\text{curl}\,\vec{v}) = \text{grad}(\text{div}\,\vec{v}) - \nabla^2\vec{v}$.

Let $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$. Show that $\text{curl}(\text{curl}\,\vec{v}) = \text{grad}(\text{div}\,\vec{v}) - \nabla^2\vec{v}$. 12

(b) स्टोक्स प्रमेय का इस्तेमाल करते हुये रेखा समाकल $\int_C -y^3dx + x^3dy + z^3dz$ का मान निकालिये। यहाँ सिलिन्डर $x^2 + y^2 = 1$ और समतल $x + y + z = 1$ का प्रतिच्छेद C है। C पर अभिविन्यास xy-समतल में वामावर्त गति के संगत है।

Evaluate the line integral $\int_C -y^3dx + x^3dy + z^3dz$ using Stokes' theorem. Here C is the intersection of the cylinder $x^2 + y^2 = 1$ and the plane $x + y + z = 1$. The orientation on C corresponds to counterclockwise motion in the xy-plane. 13

(c) मान लीजिये कि $\vec{F} = xy^2\vec{i} + (y + x)\vec{j}$ है। ग्रीन के प्रमेय का इस्तेमाल करते हुये प्रथम चतुर्थांश में वक्रों $y = x^2$ और $y = x$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्र पर $(\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{k}$ का समाकलन कीजिये।

Let $\vec{F} = xy^2\vec{i} + (y + x)\vec{j}$. Integrate $(\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{k}$ over the region in the first quadrant bounded by the curves $y = x^2$ and $y = x$ using Green's theorem. 13

(d) $f(y)$, जिसके लिये समीकरण $(2xe^y + 3y^2)\,dy + (3x^2 + f(y))\,dx = 0$ यथातथ्य है, ज्ञात कीजिये और हल निकालिये।

Find $f(y)$ such that $(2xe^y + 3y^2)\,dy + (3x^2 + f(y))\,dx = 0$ is exact and hence solve. 12

★ ★ ★